

17/5/21

Τετραγωνικές Μορφές

Θέμα: Μελέτη μορφώσεων και επιμορφώσεων 2^{ου} βαθμού
Ανάλυτική Γεωμετρία - Γραμμική Άλγεβρα

Ερώτημα: Μπορούν παραστάσεις 2^{ου} βαθμού να αναμετασχηματιστούν με τη χρήση οπινδών;

a) $2x^2 + 3xy - 7y^2$ μελέτη της παράστασης:

$$2x^2 + 3xy - 7y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x + \frac{3}{2}y, \frac{3}{2}x - 7y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 3xy + \frac{3}{2}xy - 7y^2$$

$$= 2x^2 + \frac{3}{2}yx + \frac{3}{2}xy - 7y^2$$

b) $1x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 4xy - 2xz + 6yz =$

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

δ) Ποια είναι η μέγιστη (αν υπάρχει) ή ελάχιστη (αν υπάρχει) τιμή των προηγούμενων παραστάσεων?

Αν η παράσταση ήταν $2x^2 + y^2 + 5z^2 \geq 0$ ελάχιστο $\neq 0$

$$x = y = z = 0$$

Δεν έχει μέγιστο

$$x^2 + y^2 + xy$$

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > 0$$

Θεώρημα: Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός συμμετρικός πίνακας με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του σε φθίνουσα διάταξη ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$). Αν $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ με $\|(x_1, \dots, x_n)\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1)$ τότε:

$$\lambda_1 \geq \underbrace{(x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{επίσης}} \geq \lambda_n$$

Αποδ.: $\mathbb{R}^n = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ορθοκανονική βάση με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι $Av_i = \lambda_i v_i$ $i=1, \dots, n$ και $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ $\oplus$ εδώ χρησιμοποιούμε το ιδιοδιακρίμα για να έχουμε μια ορθοκανονική βάση

Έστω $u \in \mathbb{R}^n$ με $\|u\| = 1$. Αρα $u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ και $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την παράσταση $u A u^t = \langle u, (A u)^t \rangle = \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, (A(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n))^t \rangle =$

$$= \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) A^t \rangle = \oplus$$

$$A^t A \oplus = \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, a_1 v_1 A^t + \dots + a_n v_n A^t \rangle =$$

$$= \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_n \lambda_n v_n \rangle =$$

$$= \langle a_1 v_1, a_1 \lambda_1 v_1 \rangle + \langle a_1 v_1, a_2 \lambda_2 v_2 \rangle + \dots + \langle a_n v_n, a_n \lambda_n v_n \rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle a_i v_i, a_j \lambda_j v_j \rangle = \sum_j \sum_i a_i a_j \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle \stackrel{i=j}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i \cdot 1 = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \dots + \lambda_n a_n^2$$

$$\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 \geq \lambda_1 a_1^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 \geq \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \dots + \lambda_n a_n^2$$

$$\lambda_1 (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-1} \geq \lambda_1 (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-1} \geq \lambda_1 (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-1} = 0$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_1 \frac{A u^t}{\|u\|} \geq \lambda_1 \text{ , όταν } \|u\|=1$$

Γράφουμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ σαν γραμμές:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t \underset{\text{στίλες}}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^t \underset{\text{γραμμές}}{=} (x_1 \dots x_n) A^t = (y_1 \dots y_n)$$

Ορισμός: Έστω V^n : n-διάστατος διαν. χώρος και $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ μια βάση του. Μια τετραγωνική μορφή

$Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνλιν - αλγεβρική με τύπο:

$$Q(v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j, \text{ όπου } v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

π.χ. α) Δίνεται η τετραγωνική μορφή $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$Q(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + xy + yx = 2x^2 + 3y^2 + 2xy$$

$$a_{11} = 2, a_{22} = 3, a_{12} = 1, a_{21} = 1$$

6) Δίνεται η τετραγωνική μορφή $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με συντελεστές
 $a_{11}=1$, $a_{22}=7$, $a_{33}=-2$, $a_{12}=2$, $a_{13}=-1$, $a_{21}=2$,
 $a_{23}=3$, $a_{31}=-1$, $a_{32}=3$. Να βρεθεί ο τύπος της:

Έστω (x_1, x_2, x_3) τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ στην
κανονική βάση:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 +$$

$$+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3 =$$

$$= 1 \cdot x_1^2 + 2 x_1 x_2 - 1 x_1 x_3 + 2 x_2 x_1 + 7 x_2^2 + 3 x_2 x_3 - x_3 x_1 +$$

$$+ 3 x_3 x_2 - 2 x_3 x_3 = x_1^2 + 4 x_1 x_2 - 2 x_1 x_3 + 7 x_2^2 + 6 x_2 x_3 - 2 x_3^2$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4 x_1 x_2 - 2 x_1 x_3 + 7 x_2^2 + 6 x_2 x_3 - 2 x_3^2$$

Παρατήρηση: Μια τετραγωνική μορφή $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με
τύπο $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ μπορεί να

γραφεί σαν γινόμενο πινάκων:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ με } A = (a_{ij})$$

Προσοχή ! : Μας αρέσει ο A να είναι συμμετρικός.

Παρατήρηση: Θέλουμε να μετασχηματίσουμε μια τετραγωνική
μορφή σε απλούστερη ώστε να μπορούμε να
τη μελετήσουμε πιο εύκολα.

Π.χ. Δίνεται η τετραγωνική μορφή $Q(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz$. Να τη γράψετε σε κανονική μορφή και να τη μελετήσετε. Α.ν.

$$Q(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq 0 \text{ (είναι 0 για } x=y=z=0)$$

$$Q(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ συμμετρικός}$$

$$Q(x,y,z) = (x,y,z) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ ο } A \text{ διαγωνοποιείται (από } A \text{ γραφή ως } B)$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{I_1 - I_3 + I_2} \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4-\lambda & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (4-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(2-\lambda)^2 \quad \lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$\lambda_1 = 4 \geq (x,y,z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \geq 2 \quad \forall (x,y,z) \text{ ώστε: } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$A \text{ : Διαγωνοποιείται : } V(4) = \langle (1,0,1) \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$V(2) = \langle (-1,0,1), (0,1,0) \rangle = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$A = P \Lambda P^t \quad \mu\epsilon \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Κατό είναι $\det P = 1 > 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$Q(x, y, z) = (x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z) P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^t$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \text{Ορίζουμε } (x', y', z') = (x, y, z) P$$

$$Q(x, y, z) = (x', y', z') \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= 2(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2 \quad \text{Αντί μορφή - κανονική μορφή}$$

$$Q(x', y', z') = 2(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2 \geq 0$$

Βρίσκουμε μια νέα ορθοκανονική βάση μέσω των ιδιοδιανυσμάτων του A ώστε η Q να πάρει απλούστερη μορφή. Ο ορθογώνιος πίνακας P είναι πίνακας αλλαγής βάσης από τις βάσεις των ορθοκανονικοποιημένων ιδιοδιανυσμάτων στην κανονική :

$$(x', y', z') = (x, y, z) \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x', y', z') = \left(-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}, y, \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} \right)$$

$$x' = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}$$

Πρόταση: Δίνεται η τετραγωνική μορφή

$Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) A (x_1, \dots, x_n)^t$ και ας είναι

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του πραγμ. συμμετρικού πίνακα A

η Q μετασχηματίζεται στην απλούστερη μορφή (η οποία ονομάζεται κανονική μορφή)

$Q(x'_1, \dots, x'_n) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \dots + \lambda_n (x'_n)^2$ με:

$(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n) P$ Εδώ P είναι ο ορθογώνιος πίνακας που δημιουργείται από τα ορθοκανονικά

διανύσματα του A : $A = P \Lambda P^t$ με $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

και $P = (\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_n}_{\text{στήλες}})$ με $A u_i = \lambda_i u_i$
 $i=1, \dots, n$